

# Električna mjerenja

(pomoćni materijal za predavanja)

Univerzitet Crne Gore  
Elektrotehnički fakultet

# Mjerenje snage u kolu jednosmjerne struje

- Pomoću instrumenta sa pomičnim kalemom
- Koriste se dvije metode, mjeri se snaga sa obje metode pa se uzima ona metoda kojom je dobijena greška manja

$P_t$  – snaga potrošača

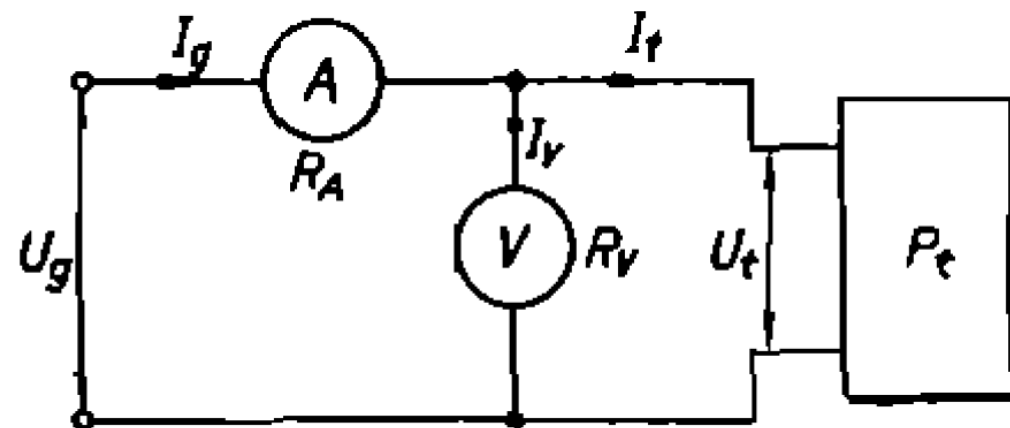
$$P_t = U_t I_t$$

- Prva metoda:

$$1) \quad P_t = U_t (I_g - I_V) = U_t I_g - U_t I_V$$

$$P_t = U_t I_g - \frac{U_t^2}{R_V}$$

Greška koja nastaje zbog unutrašnjeg otpora voltmetra



Ovo mjeri ampermetar i voltmetar (UI metoda)

# Mjerenje snage u kolu jednosmjerne struje

- Druga metoda:

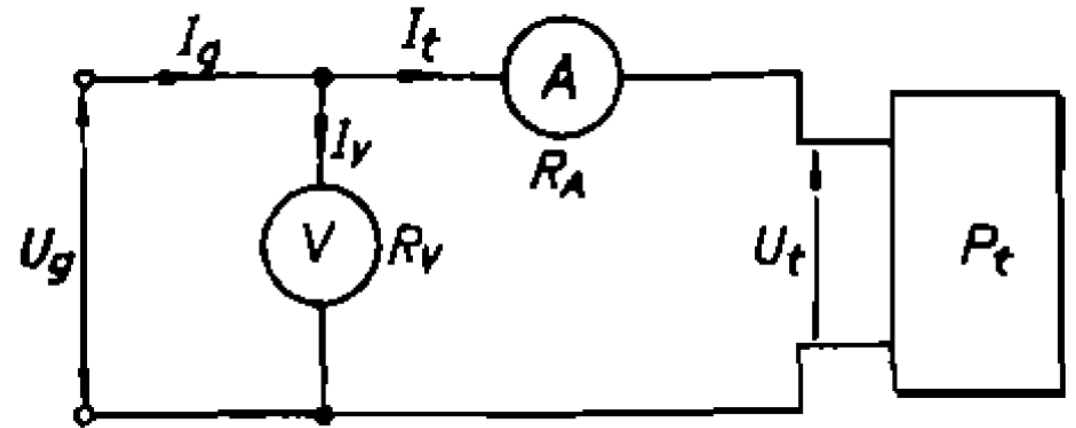
$$2) \quad P_t = U_t I_t = I_t (U_g - R_A I_t)$$

$$P_t = I_t U_g - R_A I_t^2$$

- Ako se želi odrediti snaga izvora:

$$P_g = U_g I_g = U_g (I_V + I_t) = U_g \left( \frac{U_g}{R_V} + I_t \right)$$

$$P_g = U_g I_t + \frac{U_g^2}{R_V}$$



# Mjerenje snage u kolu jednosmjerne struje

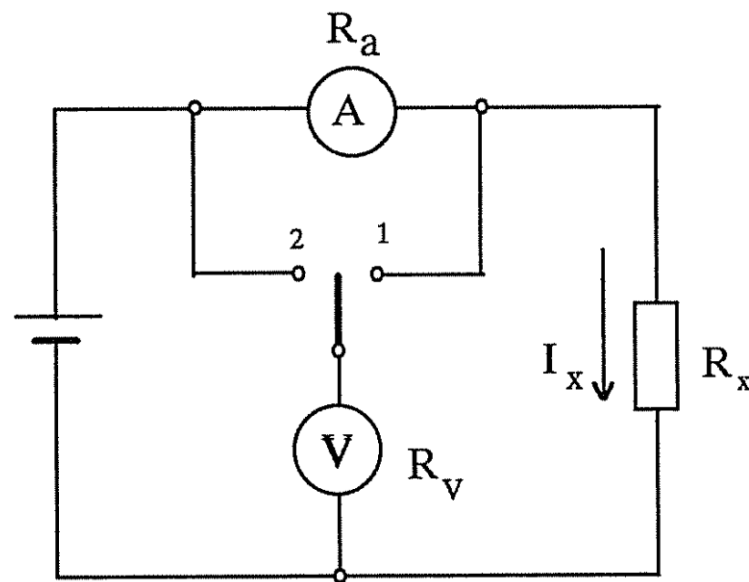
- Često je u jednom načinu spajanja potrebna korekcija zbog potrošnje instrumenta, dok se u drugom načinu mjerenja ta potrošnja može zanemariti
  - Koristi se ona metoda koja ne zahtjeva korekciju
  - Npr. kada je otpor potrošača znatno veći od otpora ampermetra, odabрати drugi način mjerenja
  - Kada je otpor potrošača neznatan u odnosu na otpor voltmetra, odabрати prvi način
  - Kada nije moguće izbjeći korekciju, bolje je odabрати spoj u kojem je potrebna korekcija zbog potrošnje voltmetra jer je otpor voltmetra obično poznat i ne zavisi od temperature.
- Osim toga, tada je korekcionni član u svim mjerenjima isti, ako je napon konstantan.

# Primjer:

**Zadatak 6.1.** Električna snaga u kolu jednosmjerne struje na potrošaču otpora  $800 \Omega$  mjeri se instrumentima sa pomičnim kalemom: voltmetrom unutrašnjeg otpora  $20 \text{ k}\Omega$  i ampermetrom unutrašnjeg otpora  $0,1 \Omega$ . Kolika je relativna sistematska greška pri mjerenju snage usljed sopstvene potrošnje instrumenata, ako je mjerenje snage obavljeno za slučaj vezivanja voltmetra ispred i za slučaj vezivanja voltmetra iza ampermetra.

**Rješenje:**

Pri mjerenju električne snage  $UI$  metodom na potrošaču  $R_x$  voltmetar i ampermetar mogu biti vezani kao na slici:



Električna snaga se određuje prema relaciji  $P_x = U_x I_x$ , gdje su  $U_x$  i  $I_x$  napon, odnosno struja na potrošaču.

Kada je prekidač u položaju 1 važi:

$$P_x = U_x I_x = U_x (I_a - I_v) = U_x I_a - U_x I_v = U_x I_a - \frac{U_x^2}{R_v}$$

gdje je  $I_a$  struja koju pokazuje ampermetar, a  $I_v$  struja kroz voltmetar. Snaga izmjerena pomoću ampermetra i voltmetra ( $UI$  metodom) je  $U_x I_a$ . Dakle, usljed sopstvene potrošnje instrumenata, pojavljuje se sljedeća greška pri mjerenju snage:

$$P_{1\%} = \frac{U_x I_a - U_x I_x}{U_x I_x} 100 = \frac{U_x I_a - U_x I_a + \frac{U_x^2}{R_v}}{\frac{U_x^2}{R_x}} 100 = \frac{R_x}{R_v} 100$$

$$P_{1\%} = 4 \%$$

Kada je prekidač u položaju 2 važi:

$$P_x = U_x I_x = (U_v - I_x R_a) I_x = U_v I_x - I_x^2 R_a$$

gdje je  $U_v$  napon koji pokazuje voltmetar. Snaga izmjerena pomoću ampermetra i voltmetra ( $UI$  metodom) je  $U_v I_x$ . Dakle, usljed sopstvene potrošnje instrumenata, pojavljuje se sljedeća greška pri mjerenju snage:

$$p_{2\%} = \frac{U_v I_x - U_x I_x}{U_x I_x} 100 = \frac{U_v I_x - U_v I_x + I_x^2 R_a}{I_x^2 R_x} 100$$

$$p_{2\%} = \frac{R_a}{R_x} 100$$

$$p_{2\%} = 0,0125 \%$$



# Mjerenje snage u kolu naizmjenične struje

- Za mjerenje snage jednofazne naizmjenične struje
- Aktivna, reaktivna i prividna snaga kod naizmjenične struje
- Aktivna i reaktivna snaga zavise od faznog pomjeraja napona i struje  
instrumenti za mjerenje ovih snaga treba da budu fazno osjetljivi

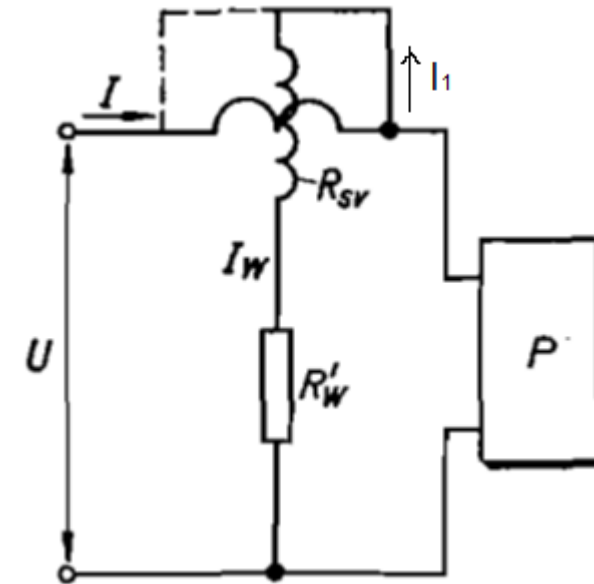
- **Aktivna snaga  $P=UI\cos\varphi$**

- **Reaktivna snaga  $Q=UI\sin\varphi$**

- **Prividna snaga  $S=UI$**

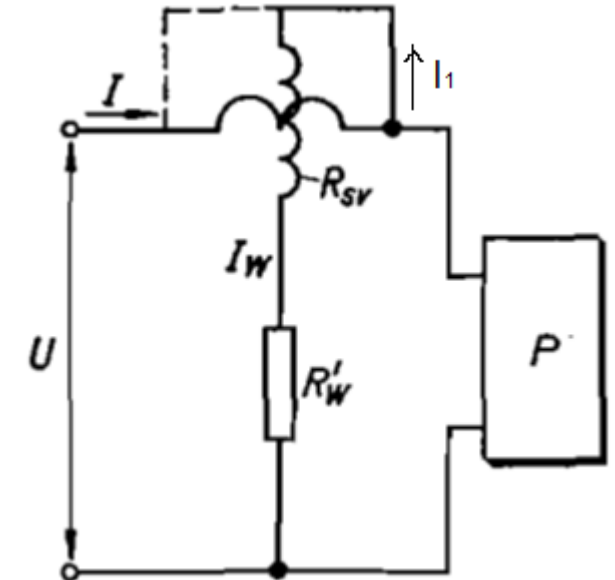
- Koriste se elektrodinamički vatmetri (spaja se prema slici)

- Predotpor  $R_p$  je potreban jer su nepomični i pomični kalem namotani bakarnom žicom, pa im se otpor mijenja sa temperaturom
- Da nema predotpora, temperatura bi uticala na veličinu struje kroz namotaje, a time i na otklon a instrumenta
- Takođe, pri mjerenju naizmjeničnih napona, struja kroz namotaje zavisila bi i od frekvencije mjerenog napona (namotaji imaju određenu reaktansu koja je srazmjerna sa frekvencijom pa je potrebno redno dodati temperaturno nezavisan otpornik  $R_p$ , takvog otpora, da prema njemu budu neznatne promjene radnog otpora i reaktanse namotaja).



# Mjerenje snage u kolu naizmjenične struje

- Elektrodinamički vatmetar ima dva kalema
  - Pomični kalem koji se napaja strujom  $I_1$  koja je srazmerna naponu  $U$
  - Nepokretni kalem napaja se strujom  $I_2$  koja je ustvari struja opterećenja  $I$
- Pomični kalem je spojen redno sa otporom  $R_w'$  i priključen je na napon potrošača
- Struja  $I_1 = I_w$  pomičnog kalema srazmjerna je naponu potrošača
- Da bi instrument mjerio snagu potrebno je da struja  $I_w$  njegove naponske grane bude u fazi sa naponom  $U$  na naponskoj grani
- Ako između napona  $U$  i struje  $I_w$  postoji mali fazni pomak  $\delta$ , tada će vatmetar umjesto  $P = UI \cos \varphi$ , pokazivati:



# Mjerenje snage u kolu naizmjenične struje

$$P_W = UI \cos(\varphi - \delta)$$

- Čime nastaje greška:

$$p_{\delta\%} = \frac{P_W - P}{P} 100$$

$$p_{\delta\%} = \frac{UI \cos(\varphi - \delta) - UI \cos \varphi}{UI \cos \varphi} 100, \quad \sin \delta = \delta, \quad \cos \delta \approx 1$$

$$p_{\delta\%} = \frac{\cos \varphi \cos \delta + \sin \varphi \sin \delta - \cos \varphi}{\cos \varphi} 100$$

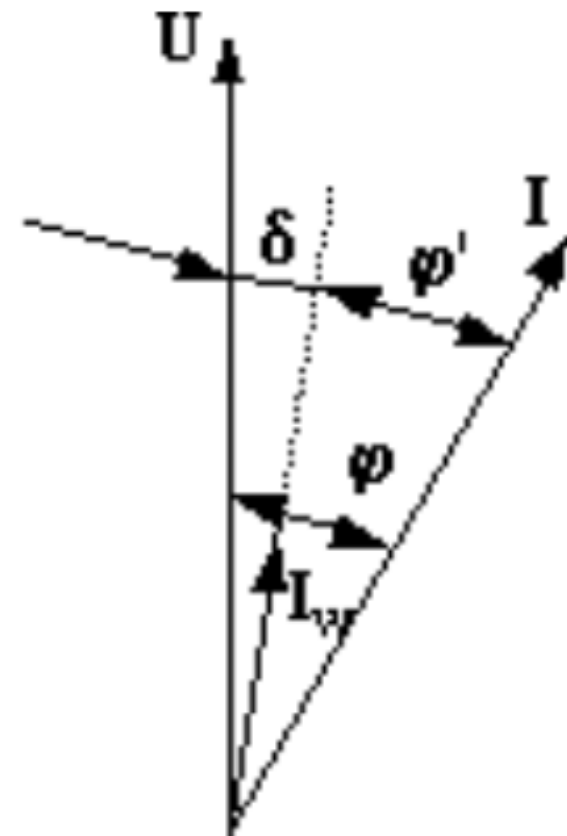
$$p_{\delta\%} = 100\delta \cdot \operatorname{tg} \varphi$$

$$P_W = UI \cos(\varphi')$$

$$\cos(\varphi') = P_W / (UI) \rightarrow \varphi = \varphi' + \delta$$



$$p_{\delta\%} = \frac{100\delta \cdot \operatorname{tg} \varphi'}{1 - \operatorname{tg} \varphi'}$$

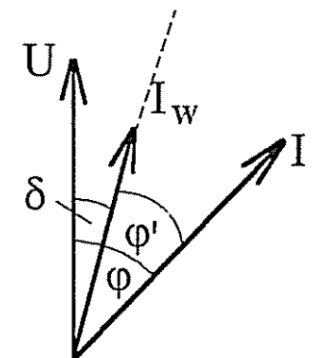
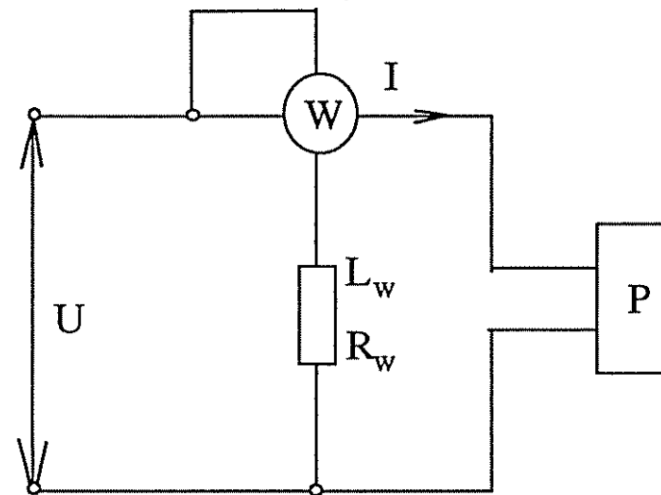


# Mjerenje snage u kolu naizmjenične struje

**Zadatak 6.3.** Pri određivanju gubitaka transformatora u praznom hodu dobijen je napon 110 V, struja 4,7 A i očitavanje na vatmetru 27,2 W, na frekvenciji 50 Hz. Koliki su gubici u transformatoru, ako je naponska grana vatmetra, otpora 6500  $\Omega$  i induktiviteta 20 mH, priključena na stezaljke ispitivanog transformatora?

Stvarna snaga potrošača iznosi:

$$P = U \cdot I \cdot \cos\varphi$$



# Mjerenje snage u kolu naizmjenične struje

Zbog induktiviteta naponske grane watmetra struja  $I_w$  nije u fazi sa naponom, već između struje  $I_w$  i napona  $U$  postoji određeni mali fazni pomak  $\delta$ . Watmetar će zbog toga pokazivati snagu:

$$P_w = U \cdot I \cdot \cos(\varphi - \delta)$$

Zbog toga nastaje procentualna relativna greška:

$$p_\delta = \frac{P_w - P}{P} \cdot 100 = \frac{UI \cos(\varphi - \delta) - UI \cos \varphi}{UI \cos \varphi} 100$$

$$p_\delta = \frac{\cos \varphi \cos \delta + \sin \varphi \sin \delta - \cos \varphi}{\cos \varphi} 100$$

Kako je  $\sin \delta \approx \delta$  i  $\cos \delta \approx 1$  dobijamo:

$$p_\delta \approx 100 \cdot \delta \cdot \operatorname{tg} \varphi$$

Fazni pomak između  $I_w$  i  $U$  iznosi:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\omega L_w}{R_w}$$

$$\operatorname{tg} \delta = 0,966 \cdot 10^{-3}$$

$$\delta = 0,055^\circ \quad (\delta = 0,966 \cdot 10^{-3} \text{ rad})$$

# Mjerenje snage u kolu naizmjenične struje

Fazni pomak  $\varphi'$  je:

$$\cos \varphi' = \frac{P_w}{UI}$$

$$\cos \varphi' = 0,0526 \quad \Rightarrow \quad \varphi' = 86,985^\circ$$

Fazni pomak  $\varphi$  između  $U$  i  $I$  dobijamo iz zbira:

$$\varphi = \varphi' + \delta = 87,04^\circ$$

Procentualna pogreška je:

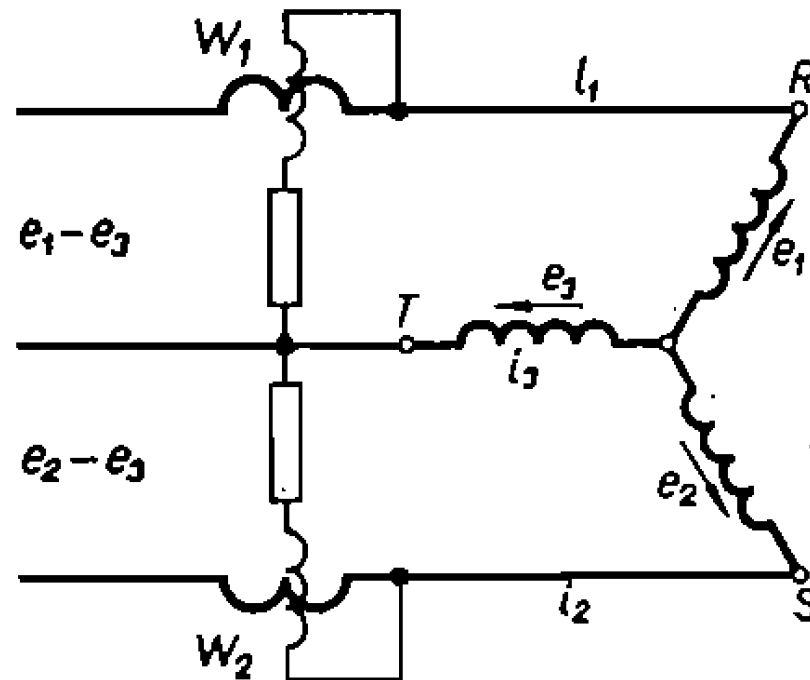
$$p_\delta = 100 \cdot \delta \cdot \operatorname{tg} \varphi = 1,86 \%$$

Stvarna snaga potrošača iznosi (vodeći računa o  $p_\delta$ ):

$$P = \frac{P_w}{1 + \frac{p_\delta}{100}} = 26,7 \text{ W}$$

# Mjerenje snage u kolu naizmjenične struje pomoću 2 vatmetra – Aronov spoj

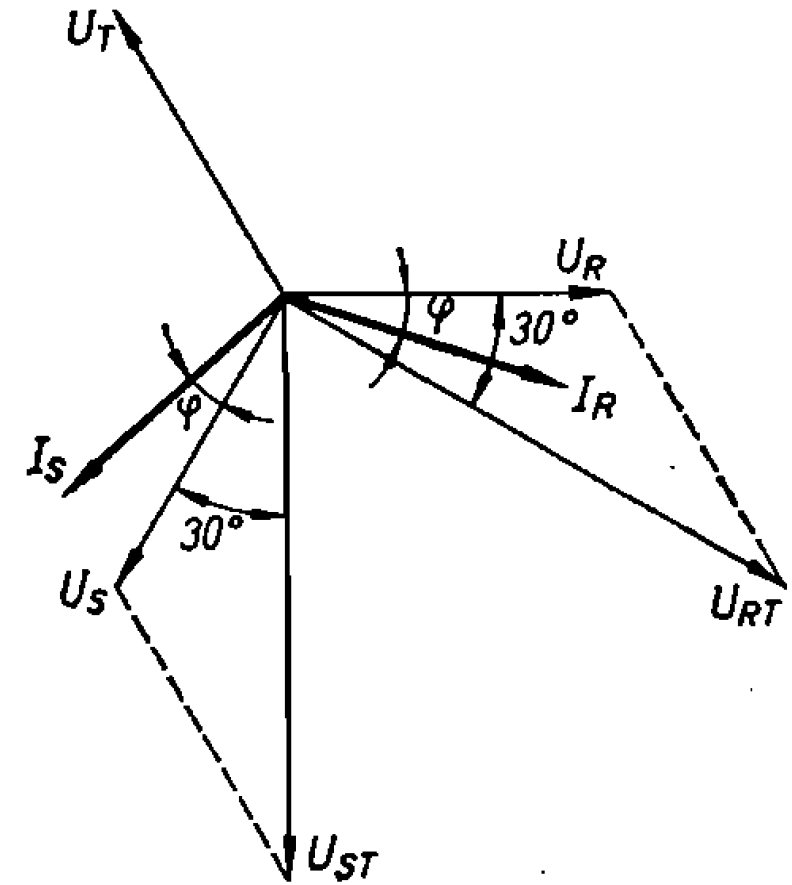
- Za mjerenje snage naizmjeničnih trofaznih sistema bez uzemljenja
- Strujne grane vatmetara  $W_1$  i  $W_2$  su priključene u dvije faze, a dovodne stezaljke njihovih naponskih grana na istu fazu u kojoj je i strujna grana
- Odvodne stezaljke naponskih grana priključuju se na fazu u kojoj nema strujnih grana vatmetara.



# Mjerenje snage u kolu naizmjenične struje pomoću 2 vatmetra

## Aronov spoj

- Na naponsku granu vatmetra  $W_1$  je primijenjen napon  $e_1 - e_3$ , a kroz njegovu strujnu granu teče struja  $i_1$
- Na naponsku granu vatmetra  $W_2$  primijenjen je napon  $e_2 - e_3$ , a kroz njegovu strujnu granu teče struja  $i_2$  pa će vatmetar  $W_2$  pokazati srednju vrijednost  $P_2$  drugog sabirka
- Suma pokazivanja prvog i drugog vatmetra  $P_1 + P_2$  će dati srednju vrijednost snage sve tri faze  $P = P_1 + P_2$



*Vektorski dijagram trofaznog sistema sa simetričnim opterećenjem, pri kojem fazne struje zaostaju za pripadnim faznim naponom za ugao  $\varphi$*



# Mjerenje snage u kolu naizmjenične struje pomoću 2 vatmetra Aronov spoj

- Na naponsku granu vatmetra  $W_1$  djeluje linijski napon  $U_R-U_T$  ( $U_{RT}$  na dijagramu)
- Između struje  $I_R$  i napona  $U_{RT}$  postoji fazni pomak od  $30^\circ-\varphi$ , pa je:

$$P_1 = I_R U_{RT} \cos(30^\circ - \varphi)$$

- Na naponsku granu  $W_2$  djeluje linijski napon  $U_{ST}$  koji prednjači naponu  $U_S$  za  $30^\circ$  pa je:

$$P_2 = I_S U_{ST} \cos(30^\circ + \varphi)$$

- U simetrično opterećenim trofaznim sistemima može se odrediti faktor snage potražaća **iz** odnosa otklona jednog i drugog vatmetra:

$$P_1 - P_2 = UI \cos 30^\circ \cos \varphi + UI \sin 30^\circ \sin \varphi - \\ -UI \cos 30^\circ \cos \varphi + UI \sin 30^\circ \sin \varphi = UI \sin \varphi$$

$$P_1 + P_2 = \sqrt{3}UI \cos \varphi$$

$$\frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2} = \frac{UI \sin \varphi}{\sqrt{3}UI \cos \varphi} = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \varphi$$

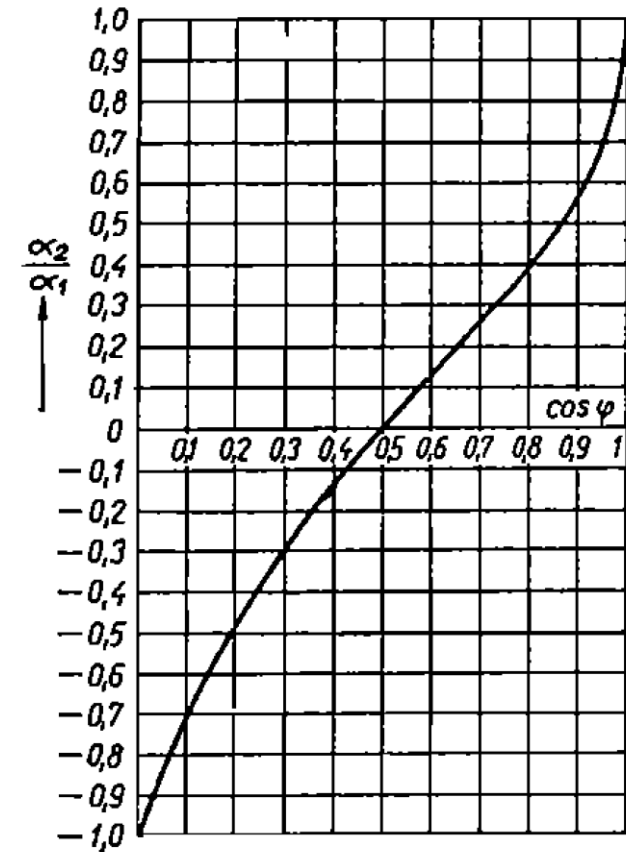
$$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{3} \frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2}$$

Označimo:  $\xi = \frac{P_2}{P_1}$  pa dobijamo:

$$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{3} \frac{1 - \xi}{1 + \xi}$$

ili

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + 3 \left( \frac{1 - \xi}{1 + \xi} \right)^2}}$$

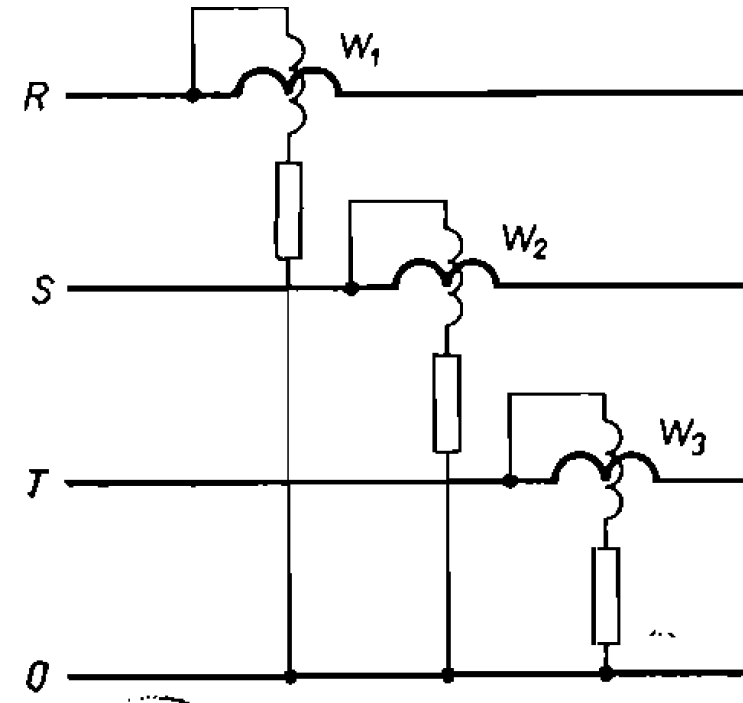


**Određivanje faktora snage iz odnosa otklona  $\alpha_2$  i  $\alpha_1$  vatmetra u Aronovom spoju**

Vrijednosti za  $\cos \varphi$  u zavisnosti od odnosa  $\xi$  prikazane su na slici i mogu poslužiti za brzo određivanje faktora snage iz odnosa  $P_2/P_1$

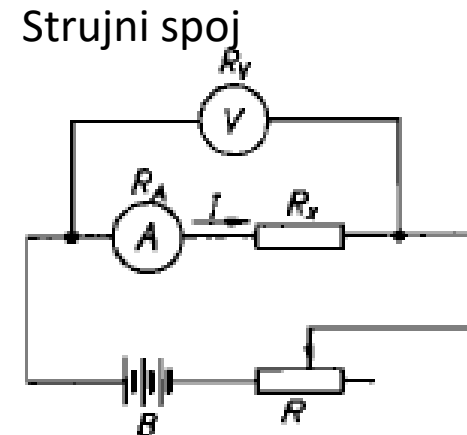
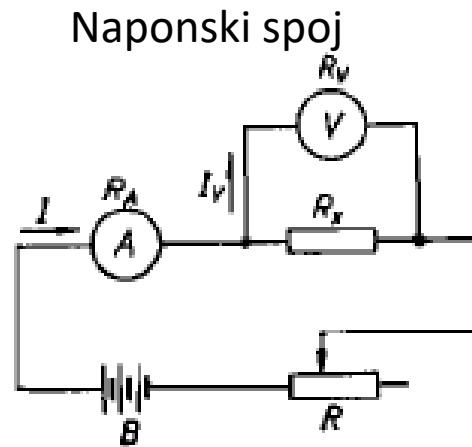
# Mjerenje aktivne snage trofaznih sistema metodom tri vatmetra

- Kroz strujne grane vatmetara teku fazne struje potrošača
- Naponske grane vatmetara su priključene na pripadne fazne napone
- Svaki vatmetar mjeri snagu jedne faze
- Suma pokazivanja svih vatmetara daje ukupnu snagu trofaznog sistema
- Ako sistem nema uzemljenje, odvodni krajevi naponskih grana spojeni su zajedno, pa čine zvjezdište sistema sastavljenog od tri naponske grane
- U sistemima sa uzemljenjem se smije upotrijebiti samo metoda tri vatmetara
- U trofaznim sistemima bez uzemljenja mogu se upotrijebiti obje metode (metoda sa 2 ili sa 3 vatmetra)
- U pogledu tačnosti nema bitne razlike



# Mjerenje otpora (mjerenjem napona i struje U-I metoda)

- Ova metoda je prikladna za mjerenje malih, srednjih i velikih otpora.
- Potrebni su samo voltmetar i ampermetar, koji se i inače vrlo često koriste. Moguća su dva spoja: naponski i strujni.



- ***U naponskom spoju*** voltmetar je priključen na stezaljke mjerenog otpornika, pa je očitani napon  $U$  jednak naponu na otporniku. Ampermetar mjeri struju  $I$  koja je suma struje otpornika i struje voltmetra  $I_V$ . Otpor  $R_V$  voltmetra je poznat, pa se može odrediti njegova struja:

$$I_V = \frac{U}{R_V}$$

- Kako kroz mjereni otpornik teče struja  $I - I_V$ , njegov otpor je jednak:

$$R_X = \frac{U}{I - I_V} = \frac{U}{I - \frac{U}{R_V}}$$

# Mjerenje otpora (mjerenjem napona i struje U-I metoda)

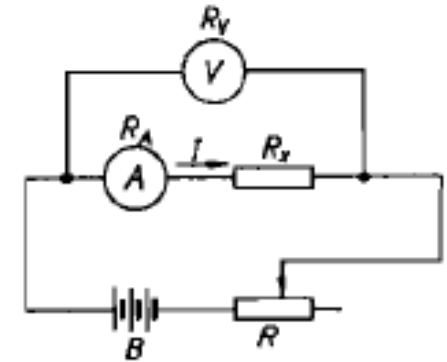
**U strujnom spoju** ampermetar mjeri struju otpornika, a voltmetar pad napona na ampermetru i mjenom otporniku. Ako je otpor ampermetra  $R_A$  tada je:

$$R_X = \frac{U - R_A I}{I} = \frac{U}{I} - R_A$$

Pri malim otporima upotrijebićemo naponski spoj, a pri velikim otporima upotrebljava se strujni spoj.

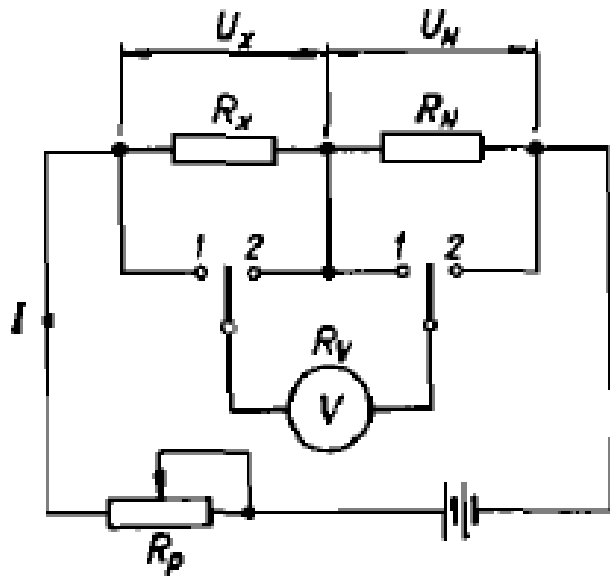
- Tačnost mjerenja otpora zavisi od klase tačnosti upotrijebljenih instrumenata i veličine njihovih otklona. Poželjno je da otkloni budu što bliže punom otklonu.
- Za preciznija mjerenja upotrebljavaju se instrumenti klase 0,2 (ili čak 0,1) s mnogo mjernih opsega.
- Upotrebom odgovarajućih instrumenata mogu se pomoću ove metode mjeriti otpori od  $10^{-6}$  do  $10^{12} \Omega$ .

Strujni spoj

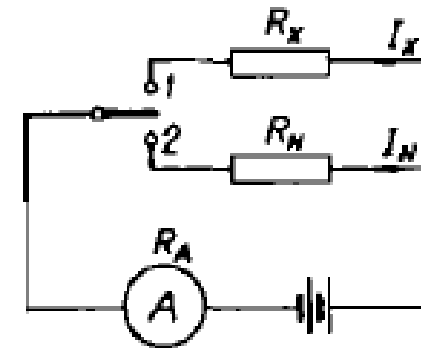


# Uporedne metode za mjerenje otpora

- Kod ovih metoda uključuju se poznati i nepoznati otpor u seriju ili paralelno, pa se porede njihovi naponi, odnosno struje.
- Vrijednost nepoznatog otpora dobija se na osnovu vrijednosti poznatog otpora (npr. etalona otpora) i odnosa otklona na istom instrumentu, pa se generalno može postići veća tačnost nego mjerenjem napona i struje.



Uporedna metoda mjerenja u serijskom spoju



Uporedna metoda mjerenja u paralelnom spoju

- U serijskom spoju priključeni su na izvor jednosmjernog napona nepoznati i poznati otpori  $R_X$  i  $R_N$  spojeni redno.
- Struju u strujnom krugu podešavamo otporom  $R_p$  na pogodnu vrijednost.
- Ta struja uzrokuje na otporu  $R_X$  pad napona  $U_X$ , koji mjerimo voltmetrom V ukoliko je prekidač u položaju 1:

$$U_X = I \frac{R_X R_V}{R_X + R_V}$$

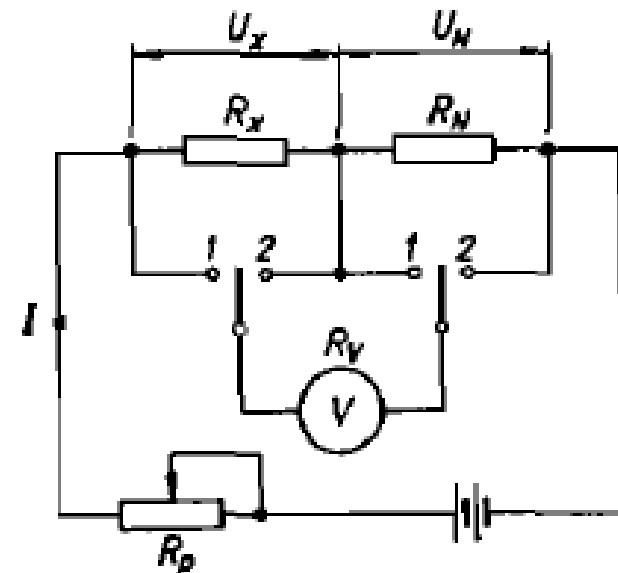
gdje je  $R_V$  otpor voltmetra.

- Kada je prekidač u položaju 2 voltmetar mjeri pad napona na poznatom otporu  $R_N$ :

$$U_N = I \frac{R_N R_V}{R_N + R_V}$$

- Iz prethodnih izraza dobijamo, uz pretpostavku da se struja za vrijeme mjerenja ne mijenja:

$$R_X = R_N \frac{U_X}{U_N} \frac{R_V}{R_V + R_N \left(1 - \frac{U_X}{U_N}\right)}$$



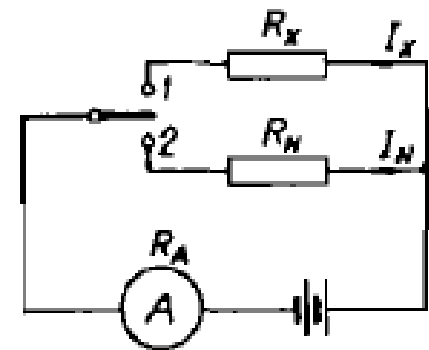
**Ako su otpori  $R_X$  i  $R_N$  znatno manji od otpora voltmetra  $R_V$**

$$R_X = R_N \frac{U_X}{U_N}$$

- Pri mjenjenju velikih otpora prikladniji je paralelni spoj.
- Tu mjerimo, uz konstantan napon izvora, struje  $I_X$  i  $I_N$  kroz nepoznati i poznati otpor:

$$I_X = \frac{U}{R_X + R_A} \quad I_N = \frac{U}{R_N + R_A}$$

$$R_X = (R_N + R_A) \frac{I_N}{I_X} - R_A$$



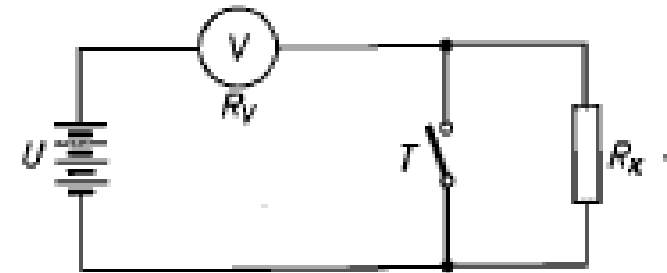
- Pri mjenjenju velikih otpora možemo zanemariti otpor  $R_A$  ampermetra, pa se dobija jednostavniji izraz:

$$R_X = R_N \frac{I_N}{I_X}$$



# Omometri s pomičnim kalemom

- Prema Ohmovom zakonu, otpor je obrnuto razmjernan struji ( $R = U/I$ ). Stoga se skala instrumenta koji mjeri struju ili napon mjenog otpora može izbađdariti u omima, ako se održava konstantan napon, odnosno struja.
- Za mjerenje većih otpora pogodan je spoj sa slike.
- Na konstantni napon  $U$  serijski su priključeni instrument velikog unutrašnjeg otpora  $R_V$  i mjereni otpor  $R_X$ , koji se može kratko spojiti pomoću prekidača  $T$ . Na instrumentu se očitavaju struje  $I_1$  i  $I_2$ , odnosno otkloni  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$ , pri zatvorenom i otvorenom prekidaču:
- Vidimo da je za određivanje mjenog otpora važan samo odnos otklona, pa na tačnost mjerenja neće uticati slabljenje magneta instrumenta i slično.
- Da bi se postigla veća tačnost mjerenja, poželjno je da otklon  $\alpha_1$ , bude što veći. Stoga se redovno za  $\alpha_1$ , bira pun otklon instrumenta.
- Ako je mjereni otpor mali, dobijaće se i pri otvorenom prekidaču približno pun otklon, pa će za  $\alpha_1 = \alpha_2$ , biti  $R_X = 0$
- Obratno, struja  $I_2$  odnosno otklon  $\alpha_2$  instrumenta, biće manji što je veći mjereni otpor, pa  $\alpha_2 = 0$  znači:  $R_X = \infty$



Slika 9.64. Omometarski spoj

$$I_1 = \frac{U}{R_V} = k\alpha_1$$

$$I_2 = \frac{U}{R_V + R_X} = k\alpha_2$$

$$R_X = R_V \left( \frac{\alpha_1}{\alpha_2} - 1 \right)$$

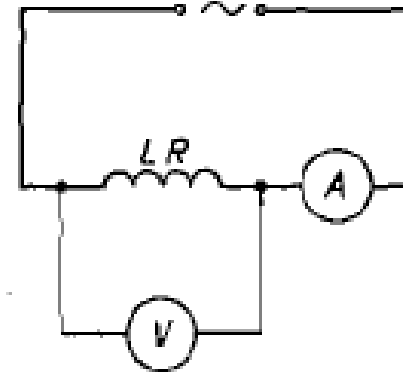
# Mjerenje induktiviteta (U-I metoda)

- Kalem induktiviteta  $L$  i otpora  $R$  predstavljaće kod naizmjenične struje impedansu  $Z$ :

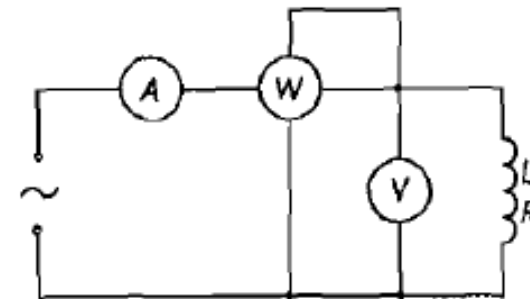
$$Z = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2}$$

- Vrijednost impedanse  $Z$  možemo odrediti mjerenjem napona i struje kalema, a otpor  $R$  nekom od jednosmjernih metoda za mjerenje otpora. To važi samo za kalemove čiji su gubici jednaki na pri naizmjeničnoj i jednosmjernoj struji.
- Ako su kalemovi sa željeznim jezgrom, javljaju se gubici u željezu pri naizmjeničnoj struji.
- U takvim slučajevima potrebno je mjeriti gubitke kod naizmjenične struje, pa upotrebljavamo
- Drugu šemu: struju i napon kalema mjerimo ampermetrom i voltmetrom, a gubitke  $P$  vatmetrom:

$$L = \frac{1}{\omega I^2} \sqrt{U^2 I^2 - P^2}$$



Mjerenje induktiviteta mjerenjem napona i struje



Mjerenje induktiviteta mjerenjem napona, struje i snage

# Mjerenje kapaciteta U-I metodom

- Kako kapacitet kod naizmjenične struje predstavlja reaktansu

$$X = \frac{1}{2\pi fC}$$

može se njegova vrijednost (pri poznatoj frekvenciji  $f$ ) odrediti mjerenjem struje i napona:

$$C = \frac{I}{2\pi fU}$$

- Pri mjerenju treba voditi računa o sinusnom obliku napona, jer za više harmonike, kapacitet ima manju reaktansu.
- Prethodni izraz važi samo za kondenzatore s neznatnim gubicima.

